

# CH4 NUKLÉOSYNTHESE PRIMORDIALE

38

→ Référence: Kolb-Turner, The Early Universe p 87 à 99

## 4.1 Equilibre statistique nucléaire (NSE)

Prop La densité d'un noyau : avec  $A$  nucléons,  $Z$  proton, non relativiste et en équilibre chimique est donnée par:  $\Leftrightarrow T \ll m_i$

$$n_i = g_i \left( \frac{m_i T}{2\pi} \right)^{3/2} \exp \left\{ \frac{\mu_i - m_i}{T} \right\}$$

Si en plus,  $i$  est en équilibre chimique avec  $p$  et  $n$ , alors  
 $\mu_i = Z_i \mu_p + (A_i - Z_i) \mu_n$

→ Pour un proton :  $n_p = 2 \left( \frac{m_p T}{2\pi} \right)^{3/2} e^{(\mu_p - m_p)/T}$  et pour un

$$\text{neutron: } n_n = 2 \left( \frac{m_n T}{2\pi} \right)^{3/2} e^{(\mu_n - m_n)/T}$$

DEF L'énergie de liaison nucléaire  $B_i$  est définie par  
 $B_i = Z_i m_p + (A - Z_i) m_n - m_i$

Prop On peut réexprimer la densité selon :

$$n_i = g_i A_i^{3/2} 2^{-A_i} \left( \frac{2\pi}{m_N T} \right)^{\frac{3}{2}(A_i-1)} n_p^{Z_i} n_n^{A_i-Z_i} e^{B_i/T}$$

DEMO En effet, on a :

$$\exp \left\{ \frac{Z_i \mu_p}{T} \right\} = \exp \left\{ \frac{Z_i \mu_p}{T} \right\} n_p^{Z_i} 2^{-Z_i} \cdot \left( \frac{2\pi}{m_N T} \right)^{\frac{3}{2} \cdot Z_i}$$

$$\exp \left\{ \frac{(A_i - Z_i) \mu_n}{T} \right\} = \exp \left\{ \frac{(A_i - Z_i) \mu_n}{T} \right\} n_n^{A_i - Z_i} 2^{-A_i + Z_i} \left( \frac{2\pi}{m_N T} \right)^{\frac{3}{2} (A_i - Z_i)}$$

On trouve alors :

$$\exp \left\{ \frac{\mu_i}{T} \right\} = \exp \left\{ \frac{Z_i \mu_p + (A_i - Z_i) \mu_n}{T} \right\} = n_p^{Z_i} n_n^{A_i - Z_i} 2^{-A_i} \left( \frac{2\pi}{m_N T} \right)^{\frac{3}{2} A_i}$$

Et ainsi,

$$n_i = g_i A_i^{3/2} 2^{-A_i} \left( \frac{2\pi}{m_N T} \right)^{\frac{3}{2} (A_i-1)} n_p^{Z_i} n_n^{A_i - Z_i} e^{B_i/T}$$

→ Quelques valeurs d'énergie de liaison:

| Z               | B <sub>i</sub> | B <sub>i</sub> /A <sub>i</sub> | g <sub>i</sub> |
|-----------------|----------------|--------------------------------|----------------|
| D = 2H          | 2,22 MeV       | 1,1 MeV                        | 3              |
| 3H              | 8,48 MeV       | 2,8 MeV                        | 2              |
| <sup>3</sup> He | 7,72 MeV       | 2,6 MeV                        | 2              |
| <sup>4</sup> He | 28,3 MeV       | 7,1 MeV                        | 1              |

DEF On définit la fraction de masse  $X_i$  selon:

$$X_i \equiv \frac{n_i \cdot A_i}{n_N} \text{ avec } n_N = n_n + n_p + \sum_i A_i n_i$$

↳ On a bien  $\sum_i X_i = 1$

(p23) → Le ratio baryon-photon est  $\eta = \frac{n_N}{n_\gamma}$  et la densité de  $\gamma$  est  $n_\gamma = \frac{2}{\pi^2} \zeta(3) T^3$

PROP La fraction de masse à l'équilibre statistique nucléaire est donnée par l'équation de Saha:

$$X_i = g_i \left( \zeta(3)^{A_i-1} \pi^{(1-A_i)/2} 2^{(3A_i-5)/2} \right) A_i^{5/2} \left( \frac{T}{m_N} \right)^{3(A_i-1)/2} \left( \frac{g_{*s}(T)}{g_{*}(T_0)} \right)^{A_i-1} \\ \times \eta^{A_i-1} X_p^{Z_i} X_n^{A_i-Z_i} e^{B_i/T}$$

DEMO En partant de la définition, on a:

$$X_i = \frac{n_i A_i}{n_N} = g_i A_i^{3/2} 2^{-A_i} \left( \frac{2\pi}{m_N T} \right)^{3/2(A_i-1)} n_p^{Z_i} n_n^{A_i-Z_i} e^{B_i/T} \cdot \frac{A_i}{n_N}$$

Or,  $n_p = n_N \cdot X_p$  et  $n_n = n_N \cdot X_n$ . Ainsi,

$$n_p^{Z_i} n_n^{A_i-Z_i} = X_p^{Z_i} X_n^{A_i-Z_i} n_N^{A_i}$$

De plus,  $n_N^{-1+A_i} = (\eta \cdot n_\gamma)^{A_i-1} = \eta^{A_i-1} \cdot \left( \frac{g_{*s}(T)}{g_{*}(T_0)} \right)^{A_i-1} \cdot \left( \frac{2}{\pi^2} \zeta(3) T^3 \right)^{A_i-1}$

Ainsi,

$$X_i = g_i \cdot A_i^{5/2} \cdot 2^{-A_i + \frac{3}{2}(A_i-1) + A_i-1} \cdot \pi^{\frac{3}{2}(A_i-1) - 2(A_i-1)} \cdot \left( \frac{1}{m_N} \right)^{3/2(A_i-1)} \cdot T^{\frac{3}{2}(1-A_i) + 3(A_i-1)}$$

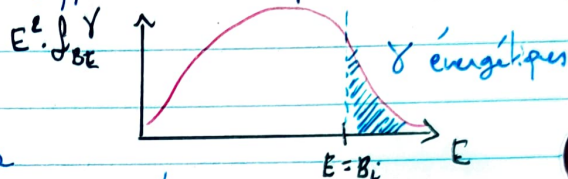
$$\times X_p^{Z_i} X_n^{A_i-Z_i} \zeta(3)^{A_i-1} \cdot \eta^{A_i-1} \cdot e^{B_i/T} \\ = g_i A_i^{5/2} 2^{(3A_i-5)/2} \cdot \pi^{(1-A_i)/2} \cdot \left( \frac{1}{m_N} \right)^{3/2(A_i-1)} \cdot T^{\frac{3}{2}(A_i-1)} \cdot X_p^{Z_i} \cdot X_n^{A_i-Z_i}$$

$$\times \zeta(3)^{A_i-1} \cdot \eta^{A_i-1} \cdot e^{B_i/T} \cdot \left( \frac{g_{*s}(T)}{g_{*}(T_0)} \right)^{A_i-1}$$

↳ À l'équilibre nucléaire statistique, pour  $m_N \gg T > B_i$ , on a  $X_i \propto \eta^{A_i-1} e^{B_i/T} \ll 1$

Il y a trop de photons d'énergie  $T > B_i$  qui cassent les noyaux.  
 ↳ Il n'y a que des neutrons et protons.

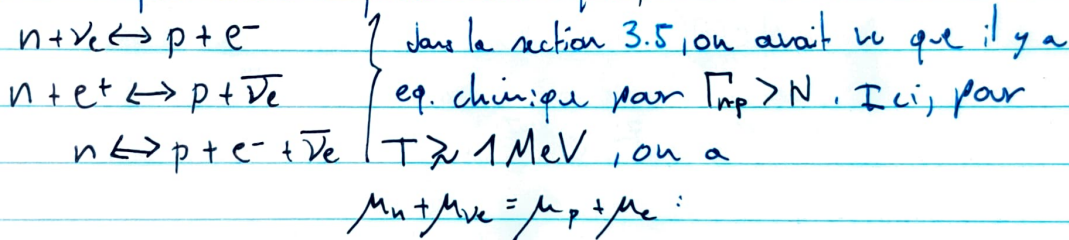
↳ Pour avoir  $X_i \sim 1$ , la température doit être en dessous de  $B_i$  car  $\eta$  est petit ( $\Rightarrow$  bcp de photons). Si bcp de photons, la queue de la distribution  $E^\gamma f_{BE}^\gamma$  contient encore suffisamment de photons pour casser les noyaux.



→ Remarque:  $\eta \ll 1$  car  $T \ll m_{p,n}$ : la catastrophe d'annihilation pour les baryons a déjà eu lieu.

## 4.2 Rapport neutron-proton

→ Les processus permettant l'équilibre chimique p-n sont:



↳ Le rapport des densités est alors

$$\frac{n_n}{n_p} = \exp \left\{ \frac{\mu_n - \mu_p - (\mu_{\bar{\nu}_e} - \mu_{e^-})}{T} \right\} = \exp \left\{ \frac{-Q}{T} + \frac{\mu_{e^-} - \mu_{\bar{\nu}_e}}{T} \right\}$$

où  $Q \equiv m_n - m_p \approx 1,3 \text{ MeV}$

→ Potentiel chimique des électrons:

↳ Si on a  $\frac{n_e}{n_\gamma} = \frac{n_p}{n_\gamma} \sim \eta$  ( $\ll 1$  aujourd'hui), alors lorsque  $T \gtrsim m_e$ :

$$n_{e^-} \sim n_{e^+} \gg n_{e^-} - n_{e^+} \quad \text{« cause } n_b \sim n_{\bar{b}} \gg n_b - n_{\bar{b}} \text{ lorsque } T \gtrsim m_p$$

↳ Puisque  $T \sim 1 \text{ MeV}$ , on a également  $e^+ e^- \leftrightarrow \gamma\gamma$ , alors  $\mu_{e^+} = -\mu_{e^-}$

$$\text{Alors } \mu_e \ll T \sim Q \Rightarrow Q/T \gg \mu_e/T$$

↳ Lorsque  $T < m_e$ , on a  $\mu_{e^-} \rightarrow m_e$  car  $n_{e^-} \propto \exp((m_e - \mu_{e^-})/T)$  et on peut négliger  $\mu_{e^-}$ :

$$\frac{n_n}{n_p} \approx \exp \left\{ \frac{-Q}{T} - \frac{\mu_{e^-}}{T} \right\}$$

→ Potentiel chimique des neutrinos:

↳ Les neutrinos n'ont pas de catastrophe d'annihilation car ce sont des reliques chaudes (on a tjrs  $n_\nu \sim n_\gamma$  aujourd'hui) mais on assume  $m_\nu \approx 0$

→ On a alors le ratio neutron-proton suivant:

$$\frac{n_n}{n_p} = e^{-Q/T}$$

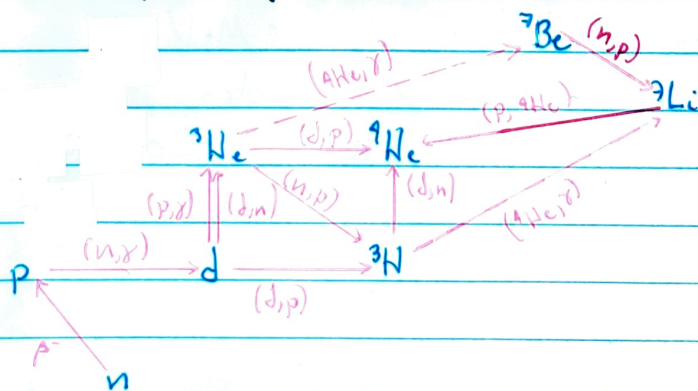
↳ Une fois que  $T < Q = m_n - m_p$ , l'énergie cinétique des  $p, e, \nu$  est insuffisante pour créer  $p \rightarrow n + \dots$ , sauf en queue de distribution  
 ⇒ suppression de Boltzmann

↳ Cette formule reste valable s'il y a équilibre chimique entre  $n$  et  $p$ :  $\Gamma_{np} \gg H$ , c'est à dire jusqu'à  $T \sim 0,3 \text{ MeV}$  quand  $\Gamma \sim H$

→ Remarque: on peut avoir suppression de Boltzmann et eq. chimique simultanément. C'est juste que les processus  $n \rightarrow p$  sont plus fréquents que les  $p \rightarrow n$

## 4.3 Chaines de réactions nucléaires

→ Lorsque  $\eta \ll 1$ , il n'y a plus assez de baryons pour avoir des réactions à plus de 2 baryons. Le seul processus dans l'équilibre statistique nucléaire est  $n + p \rightarrow d + \gamma$  ( $d$  = deutérium). Ensuite:



↳  $d + p \rightarrow ^3\text{He} + \gamma$  et  $d + d \rightarrow ^3\text{H} + p$ :  $^3\text{He}$  et  $^3\text{H}$  formés seulement après  $d$

↳ il y a un effet de goulot d'étranglement pour former du  $^7\text{Be}$  et du  $^7\text{Li}$ . Avant  $T \sim 0,1 \text{ MeV}$ , le deutérium formé se répare aussitôt, là où  $^4\text{He}$  est déjà stable à  $T \sim 0,3 \text{ MeV}$ .

## 4.4 Barrière de Coulomb

- Lorsque la température atteint  $T \sim 30 \text{ keV}$ , les nucléons n'ont plus une énergie suffisante pour passer la barrière de Coulomb et former des éléments plus lourds: c'est la fin de la nucléosynthèse primordiale.
- L'univers se comporte comme un réacteur à fusion nucléaire entre  $T \sim \text{MeV}$  et  $T \sim 30 \text{ keV}$  ( $T \sim 10^9 \text{ K}$  comme à ITER).

## 4.5 Chronologie de la BBN (nucléosynthèse primordiale)

o) Pour  $T \leq 22 \text{ MeV}$ :

$$\rightarrow (n_n + n_p) \cdot V = \text{cste et } n_{\bar{p}} = n_{\bar{n}} = 0$$

→ post catastrophe d'annihilation des baryons

1) Pour  $T \sim 10 \text{ MeV} \ll m_{pn}$

→ Il n'y a que des  $n$  et  $p$ :  $X_n = X_p = 1/2$

La diff de masse  $\Delta m = m_n - m_p$  est négligeable, les  $n$  et  $p$  sont en équilibre thermique

→ Il n'y a presque pas de deutérium  $d$ :  $X_d \propto \eta e^{8i/T} \sim 10^{-11}$

Les  $\gamma$  ont suffisamment d'énergie pour dissocier  $d$ . Il y a NSE  $p + n \leftrightarrow d + \gamma$

2) Pour  $T \sim 1 \text{ MeV}$  jusque  $T \sim 0,2 \text{ MeV}$ :

a) Découplage neutron - proton

→  $n \leftrightarrow p$  découplent à  $T_{n-p}^{\text{dec}} \sim 0,8 \text{ MeV}$  lorsque  $\Gamma = \Lambda$

$$\rightarrow \frac{n_n}{n_p} = e^{-Q/T} \sim 1/6 \text{ lorsque } T = T_{pn}^{\text{dec}}$$

$$\text{Donc } X_n \approx 1/6 \text{ et } X_p \approx 1 - X_n = 5/6 \text{ et } X_d \ll 1$$

b) Désintégration lente des neutrons

→ Lorsque  $T \leq 0,8 \text{ MeV}$ , on a  $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$  avec un temps de vie (non-relativiste)  $\tau \sim 15 \text{ min}$ , et donc une fraction de masse de  $X_n = X_n|_{T=T_{np}^{\text{dec}}} \cdot \exp\left[-\frac{(t - t_{n-p}^{\text{dec}})}{\tau}\right]$ . On observe  $X_n \rightarrow$

c) Catastrophe d'annihilation des électrons

→ Lorsque  $T \lesssim m_e$ , on a  $e^+e^- \rightarrow \gamma\gamma$  : annihilation.

On a un sursaut de température :  $T \nearrow$ , vite contrebalancé par l'inflation.

→ Lorsque  $T \sim 0,2$  MeV, les  $e^\pm$  ont transféré la plupart de leur entropie en radiation :

$g_{*}^{(s)} : p5-25$

$$g_{*} \simeq 3,36 = g_{*}|_{t_0} \quad \text{et} \quad g_{*}^s \simeq 3,91 = g_{*}^s|_{t_0}$$

→ Lorsque  $T \sim 0,1$  MeV, on a  $X_n \simeq 1/7$ ,  $X_p \simeq 6/7$  et  $X_d \ll 1$

3) Pour  $T \sim 0,15$  MeV jusqu'à  $T \sim 0,05$  MeV

C'est la nucléosynthèse primordiale

a) gâchet d'étranglement du deutérium.

→ Du  ${}^4\text{He}$  aurait déjà pu être formé à  $T \sim 0,3$  MeV

(c'est à dire  $X_{{}^4\text{He}}^{\text{NSE}}|_{T=0,3\text{MeV}} \simeq 1$ ) mais n'a pas pu car il n'y avait pas assez de deutérium  $X_d \ll 1$ . Ainsi, le  ${}^4\text{He}$  n'était pas en équilibre statistique nucléaire. On avait que  $n+p \leftrightarrow d+\gamma$

b) Formation de  ${}^3\text{He}$ ,  ${}^3\text{H}$ , puis de  ${}^4\text{He}$

→ Une fois qu'il y a suffisamment de deutérium,  $X_{{}^3\text{He}} \nearrow$  et  $X_{{}^3\text{H}} \nearrow$ , ce qui entraîne  $X_{{}^4\text{He}} \nearrow$  (Il n'y a pas de  $\gamma$  suffisamment énergétique pour les dissocier puisqu'on avait déjà  $X_{{}^3\text{He}}^{\text{NSE}} \sim X_{{}^3\text{H}}^{\text{NSE}} \sim 1$  avant)

On a :  $X_{{}^4\text{He}} = \frac{4n_{{}^4\text{He}}}{n_N} = \frac{4(n_n/2)}{n_n + n_p} = \frac{2(\widetilde{n_n/n_p})^{1/3}}{1 + (\widetilde{n_n/n_p})^{1/3}} \simeq 1/4$

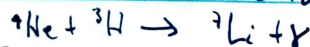
$$\text{et } n_{{}^4\text{He}}/n_{p,\text{free}} \simeq 1/12 ; \quad \frac{n(p \in {}^4\text{He})}{n(p,\text{free})} \simeq 1/6$$

→ La densité de  ${}^4\text{He}$  est limitée par le # de neutron disponibles, qui est seulement de  $1/7 \cdot n_p$

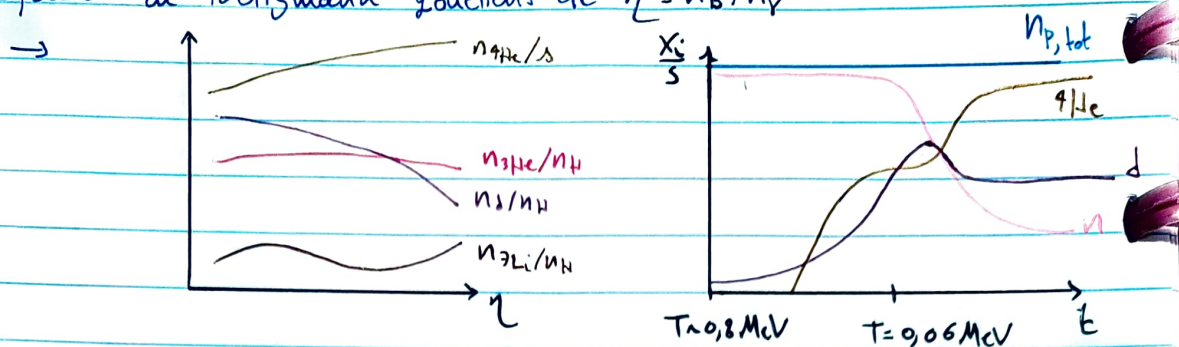
c) Barrière de Coulomb

→ Lorsque les  ${}^4\text{He}$  sont formés, on pourrait s'attendre à  ${}^4\text{He} \rightarrow {}^{12}\text{C}$  (car Bi ( ${}^{12}\text{C}$ ) important) mais en fait non : barrière de Coulomb et pas d'élément stable 5 et 8 (on ne peut pas former de  ${}^{12}\text{C}$  en ajoutant deux et p 1 par 1).

→ On a seulement quelques  ${}^4\text{He} + {}^3\text{He} \rightarrow {}^7\text{Be} + \gamma$



#### 4) Equations de Boltzmann fonctions de $\eta \equiv n_B/n_\gamma$



→ Lorsque  $\eta \uparrow$ ,  $n_p \uparrow$  et  $n_n \uparrow$ , et donc  $n_{He} \uparrow$  (car  $X_d^{NSE} \sim 1$ )

→ Lorsque  $\eta \uparrow$ ,  $n_D \downarrow$  et  $n_{He} \downarrow$  car  $n_{He} \uparrow \neq \uparrow$

→ Observationnellement, on mesure  $n_D/n_H = (2.53 \pm 0.04) \cdot 10^{-5}$

$$5.8 \cdot 10^{-10} < \eta < 6.6 \cdot 10^{-10} \Leftrightarrow 0.021 < \Omega_B h^2 < 0.024$$

$$\Leftrightarrow 4.7\% < \Omega_B < 5.3\%$$

→ En accord avec les anisotropies du CMB

→ En principe, les équations dépendent aussi de  $N_\nu$ . On avait supposé que  $n_\nu - n_{\bar{\nu}} = 0$ . Si il y a une asymétrie, cela change la BBN  $\Rightarrow$  on peut mettre une borne supérieure sur cette asymétrie.

(si  $n_\nu \neq 0$ , alors  $g_\nu \neq 2$  et par ailleurs  $g_\nu \equiv N_\nu^{eff} \cdot 2$ . On mesure  $N_\nu^{eff} = 3.13 \pm 0.31$ , consistant avec  $\nu_e$ ,  $\nu_\mu$  et  $\nu_\tau$ ).

→ L'abondance des éléments légers permettent de tester l'univers primordial, jusqu'à l'époque de la BBN.